NTMF036

INTERPRETACE KVANTOVÉ MECHANIKY

Úvod a základní formalismus - 1. a 2. přednáška

Pavel Krtouš

Klasický systém

- objektivita popisu – nezávislost na pozorovateli
- možnost libovolně zmenšit chybu měření
- možnost eliminovat vliv měřícího procesu
- možnost změření všech vlastností systému
- deterministické výsledky měření

Kvantový systém

- aktivní role pozorovatele v procesu měření
- nemožnost eliminovat vliv měření
- nemožnost současného změření všech vlastností
- nedeterministické výsledky měření

Hranice kvantového světa

- dána mírou kontroly všech vlastností
- kvantové chování pouze při přesné kontrole systému
- malé systémy – snadnější kontrola
- „malost“ nemusí být prostorové povahy
- nutná izolovanost zkoumaných rysů systému
- potřeba kontroly interakcí s okolím

kvantové chování se projevuje při kontrole interakcí na škále

$$S \sim \hbar$$

Vymezení systému

- systém je charakterizovaný souborem vlastností
  - vlastnosti → pozorovatelné → hodnoty
- vymezení systému je naším rozhodnutím
  - smysluplné pouze pokud lze vysvětlit chování systému v rámci systému
  - nechybí vlastnosti zachycující podstatné rysy systému
  - interakce s okolím je slabá a pod kontrolou
  - otevřené a uzavřené systémy
- možnost posouvání hranice systému
  - měřící přístroj může být zahrnut do systému
- některé rysy popisu mohou být dány rozštěpením na systém a pozorovatele

Ontologická povaha popisu

- klasický i kvantový popis jsou reflexí stejného světa
  - neexistuje oddělený *klasický* a *kvantový* svět
- náš popis slouží primárně k:
  - zachycení pozorovaných korelací
  - utřiďování naměřených dat
  - predikci a vysvětlování dat
- popis nemusí být nutně modelem reality

Realismus vs. Instrumentalismus

Ontologická povaha popisu

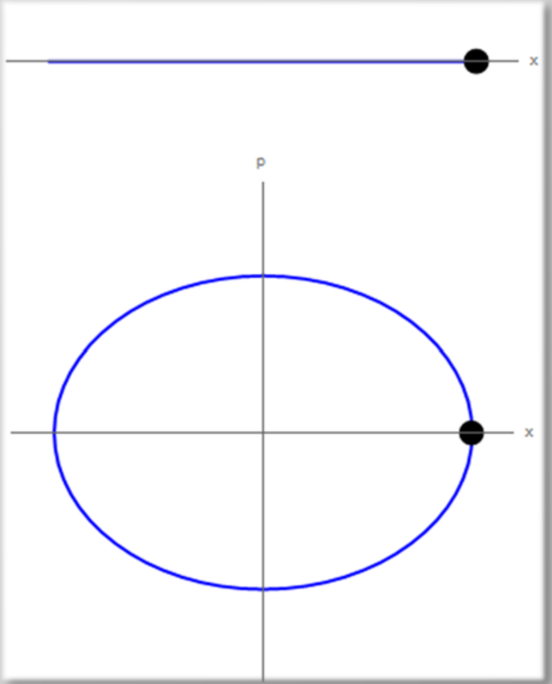
Realismus vs. Instrumentalismus

- popis je modelem reality
- jeho základní elementy odpovídají stavebním kamenům přírody
- odraz strukturních vztahů reality
- může jít o nedokonalý model

- popis je pouze nástroj k vyznání se v přírodě
- struktura popisu nemusí odpovídat struktuře reality
- popis je naše konstrukce simulující pozorovaná data
- jedná se spíš o jazyk než o model

Klasický stav

- *konfigurační prostor* – prostor „poloh“
  - pohybové rovnice 2. řádu
    $$m\,\ddot{x} = F(x)$$
  - počáteční podmínky: poloha a rychlost
- *fázový prostor* – prostor „poloh“ a „hybností“
  - zdvojení konfiguračního prostoru
  - pohybové rovnice 1. řádu
    $$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p) \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)$$
  - počáteční podmínky: stav systému



Klasický stav

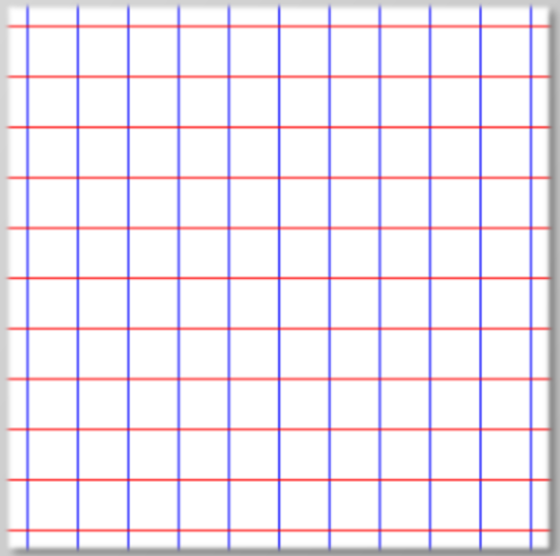
- Symplektická struktura fázového prostoru
  - Poissonovy závorky

$$\{A, B\} = C$$

  - kanonicky sdružené proměnné: „polohy“ a „hybnosti“

$$\{x, p\} = 1$$

ke každé sadě „poloh“ existuje sada „hybností“



Klasický stav

stav = úplná znalost systému

- stav určuje hodnoty všech pozorovatelných
- stav určuje vývoj systému
- stav modeluje *existenci*/*bytí*/*realizaci* systému

Nedeterminismus kvantových jevů

- opakování téhož experimentu může vést k různým výsledkům
- dokonalá znalost přípravy systému nedostačuje k deterministické reprodukci měření všech vlastností
- lze předpovídat pouze pravděpodobnosti výsledků

Měření ovlivňuje systém

- nelze eliminovat proces měření
  pozorování nutně ovlivňuje systém
- omezení vlivu měření vede k zhoršení měření
  přesnější měření mění následný vývoj systému

Definovanost vlastností

- neměřené vlastnosti nemusí nabývat svých hodnot
- po měření má měřená vlastnost definovanou hodnotu
- pokud naměření hodnoty nezmění systém,
vlastnost byla definována a výsledek byl determinován
- pokud naměření hodnoty změní systém,
před měřením nebyla vlastnost definována
- měření vlastnosti s nedefinovanou hodnotou vede k nedeterministickému výsledku
- které vlastnosti jsou definované není apriorní
– závisí na přípravě systému

Kvantová nerozlišitelnost

- v experimentálním uspořádání měřícím danou vlastnost alternativy odpovídající jednotlivým hodnotám jsou ***kvantově rozlišitelné***

- v experimentálním uspořádáním neměřícím (ani v principu) danou vlastnost jsou hypotetické alternativy odpovídající hodnotám ***kvantově nerozlišitelné*** (též ***virtuální*** alternativy)

- systém se vyvíjí všemi virtuálními alternativami najednou
  žádná z nich se aktuálně nerealizuje
  příslušná vlastnost nemá definovanou hodnotu

Komplementarita

- nelze měřit všechny vlastnosti najednou
- ***komplementární pozorovatelné***
  – pozorovatelné, jejichž definovanost se navzájem vylučuje
- ***komutující pozorovatelné***
  – pozorovatelné, které lze měřit zároveň

- lze měřit vždy jen jednu z kanonicky sdružených proměnných
- ***Heisenbergovy relace neurčitosti***
  – omezení na definovanost kanonicky sdružených proměnných

$$\Delta x\, \Delta p \sim \hbar$$

Komplementarita

- nelze měřit všechny vlastnosti najednou
- ***komplementární pozorovatelné***
  – pozorovatelné, jejichž definovanost se navzájem vylučuje
- ***komutující pozorovatelné***
  – pozorovatelné, které lze měřit zároveň

- maximální sada komutujících pozorovatelných
  – definuje maximální znalost o systému

Kvantový stav

kvantový stav = maximální možná znalost systému

- nelze měřit všechny vlastnosti najednou
- maximální znalost = hodnoty maximální sady komutujících pozorovatelných
- nedefinované hodnoty komplementárních pozorovatelných
- ke každé sadě komutujících pozorovatelných jeden typ stavů

- *kompatibilní stavy* – různé výsledky jednoho měření
- výsledky měření maximální sady komutujících pozorovatelných
  = *báze kompatibilních stavů*

Kvantová superpozice

- různé báze kompatibilních stavů ⇒ netriviální struktura prostoru stavů
- nekompatabilní stavy lze získat superpozicí kompatibilní báze
- ***superpozice stavů*** – stav odpovídající nerozlišitelným alternativám

Kvantový prostor stavů

prostor stavů = Hilbertův prostor $\mathcal{H}$

$$|\mathrm{stav}\rangle \quad |\psi\rangle \qquad |\mathrm{pol}: x\rangle \quad |\mathrm{hyb}: p\rangle \qquad |\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle$$

- ***linearita*** $\alpha_\uparrow|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow|\downarrow\rangle$
  - superpozice
- ***skalární součin*** $\langle \mathrm{st}\ 1|\mathrm{st}\ 2\rangle$
  - kompatibilita stavů $\langle \mathrm{st}\ 1|\mathrm{st}\ 2\rangle = 0$
  - pravděpodobnosti $|\langle \mathrm{st}\ 1|\mathrm{st}\ 2\rangle|^2$

Vlnová funkce

- prostor $\mathcal{H}$ = prostor abstraktních vektorů
- x-reprezentace = parametrizace $\mathcal{H}$ pomocí komplexních L^2-funkcí

$$\psi(x) = \langle \text{pol:}\, x | \text{stav} \rangle$$

$$|\text{stav}\rangle = \int \psi(x)\, |\text{pol:}\, x\rangle\, dx$$

- skalární součin

$$\langle \text{st } 1 | \text{st } 2 \rangle = \int \psi_1^*(x)\, \psi_2(x)\, dx$$

Elementární kvantové měření

- maximální sada komutujících pozorovatelných
  - báze kompatibilních stavů

$$|m\rangle \quad m \in I \qquad\qquad \langle m|n\rangle = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- proces měření (von Neumann) – kolaps/redukce kvantového stavu
  - před měřením:

$$|\mathrm{st}\rangle$$

  - po měření:

výsledek	*pravděpodobnost*	*výsledný stav*
m	$p(m\|\mathrm{st}) = \dfrac{\|\langle m\|\mathrm{st}\rangle\|^2}{\langle \mathrm{st}\|\mathrm{st}\rangle}$	$\|\mathrm{red}\rangle = \|m\rangle\langle m\|\mathrm{st}\rangle$

Měření polohy

- maximální sada komutujících pozorovatelných – poloha
  - báze kompatibilních stavů

$$|\mathrm{pol}: x\rangle$$

- proces měření (Bornova pravděpodobnostní interpretace)
  - před měřením:

$$|\mathrm{st}\rangle \quad \leftrightarrow \quad \psi(x) \qquad\qquad \langle\mathrm{st}|\mathrm{st}\rangle = 1$$

  - po měření:

výsledek	*pravděpodobnost*	*výsledný stav*
x	$p(x) = \lvert\psi(x)\rvert^2$	$\psi(x)\lvert\mathrm{pol}: x\rangle$

Fáze a normalizace stavu

- globální fáze stavu je irelevantní

$$e^{i\alpha}\,|\mathrm{stav}\rangle \;\leftrightarrow\; |\mathrm{stav}\rangle$$

- relativní fáze v nerozlišitelných variantách je důležitá

$$\alpha_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}|\downarrow\rangle$$

- normalizace stavu lze použít k informaci o pravděpodobnosti stavu

$$p(\mathrm{st}) = \langle \mathrm{st}|\mathrm{st}\rangle$$

Statistická směs

- ***směs*** = statistický soubor kvantově rozlišitelných
  ale klasicky nerozlišovaných stavů

$$\{|\mathrm{st}\ 1\rangle, |\mathrm{st}\ 2\rangle, |\mathrm{st}\ 3\rangle, \ \dots\} \qquad\qquad p_k = \langle \mathrm{st}\ k | \mathrm{st}\ k\rangle$$

- měření bez čtení výsledku

$$|\mathrm{stav}\rangle \quad \rightarrow \quad \{\, |n\rangle\langle n|\mathrm{stav}\rangle \,\}_{n\in I}$$

Obecné kvantové měření

- sada komutujících pozorovatelných
  - ne nutně rozlišuje veškerou dostupnou informaci
  - báze kompatibilních (ortogonálních) podprostorů $\mathcal{H}_a$
  - projektory na $\mathcal{H}_a$ – $\hat{P}_a$
- proces měření (von Neumann) – kolaps/redukce kvantového stavu
  - před měřením:

$$|\mathrm{st}\rangle$$

  - po měření:

výsledek	*pravděpodobnost*	*výsledný stav*
a	$p(a\|\mathrm{st}) = \dfrac{\langle \mathrm{st}\|\hat{P}_a\|\mathrm{st}\rangle}{\langle \mathrm{st}\|\mathrm{st}\rangle}$	$\|\mathrm{red}\rangle = \hat{P}_a \|\mathrm{st}\rangle$

Kvantové pozorovatelné

- popis pozorovatelné pomocí báze kompatibilních stavů či podprostorů

- přiřazení fyzikálních hodnot jednotlivým výsledkům

číslo výsledku	stav	hodnota pozorovatelné
m	$\|m\rangle$	a_m

- pozorovatelná

$$\hat{A} = \sum_m a_m |m\rangle\langle m|$$

Kvantové pozorovatelné

- degenerace hodnot výsledků

hodnota výsledku	podprostor	projektor
a	$\mathcal{H}_a$	$\hat{P}_a = \sum_{m:\, a_m = a} \lvert m \rangle \langle m \rvert$

- pozorovatelná

$$\hat{A} = \sum_m a_m \lvert m \rangle \langle m \rvert = \sum_a a\, \hat{P}_a$$

Kvantové pozorovatelné

- pozorovatelné je charakterizovaná operátorem!

$$|\text{stav}\rangle \;\rightarrow\; \hat{A}|\text{stav}\rangle = \sum_a a\,\hat{P}_a|\text{stav}\rangle$$

  - superpozice virtuálních výsledků měření násobené hodnotou pozorovatelné

- operátor pozorovatelné kóduje informaci o měření

$\hat{A} = \sum_m a_m|m\rangle\langle m| \quad \leftrightarrow \quad |m\rangle \quad$ *vlastní vektory*

$\hat{A} = \sum_a a\,\hat{P}_a \quad \leftrightarrow \quad \hat{P}_a \quad$ *vlastní podprostory*

Algebra pozorovatelných

- s operátory lze počítat

$$\hat{A} + \hat{B} \qquad \hat{A}\hat{B} \qquad \alpha\hat{A} \qquad \hat{A}^n \qquad F(\hat{A})$$

- násobení není obecně komutativní

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

- komutativita pozorovatelných

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

  - komutující pozorovatelné mají společnou bázi kompatibilních vlastních vektorů
  - komutující pozorovatelné lze měřit současně
  - nekomutující pozorovatelné jsou komplementární

Časový vývoj

- volný vývoj stavu – Schrödingerova rovnice

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\text{st } t\rangle = \hat{H} |\text{st } t\rangle$$

  - Hamiltonián $\hat{H}$ – operátor energie

$$\hat{H} = \sum_n E_n |n\rangle\langle n| = \sum_E E \, \hat{P}_E$$

  - vlastní vektory Hamiltoniánu – statické (neměnné) stavy

$$|n \; t\rangle \; = \; e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \, |n \; 0\rangle$$

Časový vývoj

- volný vývoj stavu – Schrödingerova rovnice

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\mathrm{st}\ t\rangle = \hat{H}|\mathrm{st}\ t\rangle$$

- generuje unitární vývoj

$$|\mathrm{st}\ t_0\rangle \quad \rightarrow \quad |\mathrm{st}\ t\rangle = \hat{U}(t|t_0)|\mathrm{st}\ t_0\rangle$$

Časový vývoj

- unitární vývoj

$$|\mathrm{st}\ t_0\rangle \quad \rightarrow \quad |\mathrm{st}\ t\rangle = \hat{U}(t|t_0)|\mathrm{st}\ t_0\rangle$$

  - zachovává skalární součin
  - zachovává superpozici
  - převádí bázi kompatibilních stavů na bázi kompatibilních stavů
  - je invertibilní
  - je jednoznačný
  - ***nedeterminismus je spojen s měřením!***